Никитин В.В.

ПОТЕНЦИАЛЫ МЕХАНИКИ «ИЗ ПЕРВЫХ ПРИНЦИПОВ»

Семейная студия «ВидеоКОТ», Санкт-Петербург, Россия

Nikitin V.V.

POTENTIALS OF MECHANICS «AB INITIO»

VideoCAT Family Studio, St.Petersburg, Russia

Реферат

Исходя из принципа наименьшего действия, найден функциональный вид потенциалов, предпочитаемых Природой.

Ключевые слова: потенциал, принцип, механика.

Abstract

Favourite potentials have been found on the basis of the least action principle.

Key words: potential, principle, mechanics.

1. Принцип действия

Принцип наименьшего (экстремального) действия в классической механике считается принципом «ab initio» (лат. от начала), поскольку выделяет из множества виртуальных движений истинные движения физической системы, соответствующие природе явления.

Для простоты рассмотрим классическое радиальное движение $r(t)$ тела единичной массы в центрально-симметричном поле с потенциалом $U(r,t)$. Варьируем действие S и лагранжиан L,

$$S[r(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(r,\dot{r},t)\,dt\ ,\ \ L = \tfrac{1}{2}\dot{r}^2 - U(r,t) \tag{1}$$

Из условия экстремальности действия найдем уравнение движения тела, взаимосвязь ускорения $\ddot{r}$ и сил $(-U_r)$, и его первый интеграл, энергию E,

$$\delta S = 0\ \Rightarrow\ \ddot{r} + U_r = 0\ \ ,\ \ E = \tfrac{1}{2}\dot{r}^2 + U(r,t)\ \ ,\ \ \dot{E} = U_t \tag{2}$$

Эти уравнения при заданных начальных условиях позволяют, в принципе, определить зависимость координаты r и скорости $\dot{r}$ тела от времени t. Камень преткновения — вид потенциала $U(r,t)$, обычно выбираемый полуфеноменологически. Попытаемся дедуктивно ограничить произвол выбора.

2. Квадратичный потенциал

Для поиска предпочтительных потенциалов будем опять варьировать действие, но уже используя уравнение движения (2) в качестве ограничения,

$$L = \left(\tfrac{1}{2}\dot{r}^2 - U\right) + \lambda\,(\ddot{r} + U_r)\ ,\quad \lambda = k\,r,\ \ k = const \neq 0 \tag{3}$$

Множитель Лагранжа λ пропорционален расстоянию от начала координат из соображений размерности. Но коэффициент пропорциональности k в уравнении Эйлера сокращается, и уравнение имеет единственное решение —

$$rU_{rr} - U_r = 0\quad \Rightarrow\quad U = c\,r^2 \tag{4}$$

На первом месте, вопреки ожиданию, оказался квадратичный потенциал, а вовсе не ньютонов потенциал гравитации. Решение этой вариационной задачи было использовано в модели космологического отталкивания.

3. Семейство предпочтительных потенциалов

Преобразуем лагранжиан (4) к виду, содержащему энергию тела в роли свободного параметра,

$$L = \left(E - 2U\right) + k\,r\,(\ddot{r} + U_r) \tag{5}$$

Теперь уравнение Эйлера и его решения содержат коэффициент κ существенным образом,

$$k\,r U_{rr} - (k+2) U_r = 0 \;\Rightarrow\; U = \begin{cases} c\,r^{2(k+1)/k} & \text{при } k \neq -1 \\ c\,r^2 & \text{при } k = \pm\infty \\ c\ln r & \text{при } k = -1 \end{cases} \tag{6}$$

Таким образом, получено вариационное обоснование степенных потенциалов. Их комплексы со звучными именами Ван-дер-Ваальса, Леннарда-Джонса и т.д. давно используют в физике. Менее известен логарифмический потенциал. Ему и квадратичному потенциалу будет посвящена отдельная статья.

На наш взгляд, вариационную систематизацию потенциалов полезно ввести, как минимум, в университетский курс физики. Собственно, она и возникла в Новосибирском университете в середине 1960-х годов. Но в те времена эта ересь была неприемлема ни для публикаций, ни для научной карьеры. Да и сейчас господствующая парадигма не изжила себя.